ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

Б.А. Андреев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ПАР ФИГУР

Вводится понятие W-эквивалентности многообразий пар фигур, на основе которого дается классификация свойств этих многообразий, приводящая к понятиям слабой и сильной геометрии многообразий пар фигур. Для пространства нуль-пар получено два обобщения понятия инфлексионности кривой в P_n, одно из которых определяется в слабой, а другое-в сильной геометрии многообразий пар фигур. Введенные понятия применяются к исследованию дифференцируемого отображения проективного пространства в пространство нуль-пар.

1. Пусть $R(F_1)$, $R(F_2)$ -пространства фигур F_1, F_2 [1, с.182] некоторого однородного пространства, а $R(F_1,F_2)$-пространство пар $F=(F_1,F_2)$ фигур F_1, F_2. Возникают два естественных отображения

$$\Pi_a: (F_1, F_2)\in R(F_1,F_2) \longrightarrow F_a\in R(F_a), \ a=1,2. \qquad (1.1)$$

Пусть $V_d \subset R(F_1,F_2)$ -невырожденное d-мерное многообразие пар F. Невырожденность многообразия V_d согласно [1] означает: $\dim \Pi_a(V_d)=d$. Особой точкой многообразия V_d назовем точку, в которой не выполняется: $\operatorname{rang} \Pi_a = d$. Такие точки исключим из рассмотрения.

О п р е д е л е н и е 1.1. Невырожденные многообразия V_d и $\widetilde{V}_d$ называются W-эквивалентными, если $\Pi_a(V_d)=\Pi_a(\widetilde{V}_d)$.

Легко проверить, что последнее условие задает на множестве всех невырожденных многообразий пар F отношение эквивалентности.

Будем говорить, что данное свойство многообразия V_d является W-инвариантным, если этим свойством обладают все многообразия, W-эквивалентные многообразию V_d. Назовем слабой геометрией многообразий пар фигур часть геометрии этих многообразий, которая ограничивается изучением W-инвариантных свойств.

Таким образом, возникает возможность следующей классификации геометрических свойств многообразий пар фигур: в зависимости от того, сохраняется или не сохраняется данное свойство при переходе к W-эквивалентным многообразиям. мы будем относить или не относить его к слабой геометрии многообразий пар фигур; в последнем случае, чтобы подчеркнуть, что данное свойство не относится к слабой геометрии, будем говорить также, что оно относится к сильной геометрии многообразий пар фигур.

Следующее определение дает пример понятия, относящегося к слабой геометрии многообразий пар фигур.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что кривая $\ell_1: R\to R(F_1,F_2)$ имеет в точке $\ell_1(0)$ слабое геометрическое касание порядка k с кривой $\ell_2: R\longrightarrow R(F_1,F_2)$, если кривая $\Pi_a\circ\ell_1$ $(a=1,2)$ имеет в точке $\Pi_a\circ\ell_1(0)$ геометрическое касание порядка k с кривой $\Pi_a\circ\ell_2$.

2. Пусть $R(p,\pi)$ -пространство неинцидентных нуль-пар проективного пространства P_n. Поместим нулевую вершину подвижного репера пространства P_n в точку p°, а остальные вершины - в гиперплоскость π° элемента $(p^\circ,\pi^\circ)\in R(p,\pi)$. Разложение кривой $\ell: R\longrightarrow R(p,\pi)$ в степенной ряд имеет вид:

$$x^i=\ell^i t+\frac{1}{2}m^i t^2+<3>, \quad \xi_i=\lambda_i t+\frac{1}{2}\mu_i t^2+<3>, \qquad (2.1)$$

где x^i, ξ_i -соответственно неоднородные координаты точки p и неоднородные тангенциальные координаты гиперплоскости π, $t\in R$, а $<3>$ означает совокупность членов порядка малости $s\geqslant 3$ относительно t. Будем считать, что $\ell^i\neq 0$, $\lambda_i\neq 0$.

Обобщим для кривых $R \to R(p,\pi)$ понятие инфлексионности кривой, известное для кривых $R \to P_n$. Заметим, что для кривых $R \to R(\pi)$, где $R(\pi)$ - пространство гиперплоскостей $\pi \subset P_n$, имеет очевидный смысл в силу дуальности пространств P_n и $R(\pi)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Кривая $\ell: R \to R(p,\pi)$ называется слабо инфлексионной в элементе $\ell(0)$, если кривые $\Pi_a \circ \ell$ инфлексионны в элементах $\Pi_a \circ \ell(0)$.

Легко заметить, что введенное понятие относится к слабой геометрии многообразий нуль-пар. Используя известные условия инфлексионности кривых $R \to P_n$, получаем необходимое и достаточное условие слабой инфлексионности кривой $R \to R(p,\pi)$ (2.1):

$$m^i = \sigma_1 \ell^i, \quad \mu_i = \sigma_2 \lambda_i. \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Кривая $\ell: R \to R(p,\pi)$ (2.1) называется инфлексионной в элементе $\ell(0)$, если выполняются условия (2.2), где

$$\sigma_1 = \sigma_2 \overset{def}{=} \sigma. \tag{2.3}$$

В теореме 2.1 дается геометрическая интерпретация введенного здесь понятия. Заметим, что свойство кривой (2.1) быть инфлексионной, в отличие от свойства быть слабо инфлексионной, не является W -инвариантным. Предположим противное. Тогда кривая $\tilde{\ell}: R \to R(p,\pi)$, такая, что кривые $\tilde{\ell}_a = \Pi_a \circ \ell$ получаются из кривых $\ell_a = \Pi_a \circ \ell$ соответственно репараметризациями $\varepsilon_a: t \longmapsto t + \rho_a t^2$, $(\rho_1 \neq \rho_2)$, должна быть инфлексионной в $\tilde{\ell}(0)$ кривой, как и кривая ℓ. (Здесь $\Pi_1(p,\pi) = p$, $\Pi_2(p,\pi) = \pi$). Но из (2.1) - (2.3) вытекает, что при таком преобразовании инфлексионность кривой ℓ не сохраняется, что приводит к противоречию со сделанным предположением.

Т е о р е м а 2.1. Чтобы слабо инфлексионная в элементе $\ell(0)$ кривая $\ell: R \to R(p,\pi)$ была в нем инфлексионной, необходимо и достаточно, чтобы существовала невырожденная корреляция K пространства P_n, для которой выполняется: 1/ $K \cdot \Pi_a \cdot \ell(0) = \Pi_b \cdot \ell(0)$; $(a,b = 1,2;\ a \neq b)$. 2/ Кривая $K \cdot \Pi_1 \cdot \ell$ имеет в $\Pi_2 \cdot \ell(0)$ аналитическое касание 2-го порядка с кривой $\Pi_2 \cdot \ell$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения корреляции K, удовлетворяющей для кривой ℓ (2.1) условию 1/, имеют вид:

$$K_{ij} x^j = \xi_i.$$

Условие 2/ означает, что для компонент матрицы $[K_{ij}]$ выполняется:

$$K_{ij} \ell^j = \lambda_i, \quad K_{ij} m^j = \mu_i.$$

Условия (2.2) слабой инфлексионности кривой ℓ приводят к следующим соотношениям для K_{ij}:

$$K_{ij} \ell^j = \lambda_i, \quad K_{ij} \sigma_1 \ell^j = \sigma_2 \lambda_i.$$

Очевидно, что эти условия являются непротиворечивыми тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = \sigma_2$, т.е. когда кривая ℓ является инфлексионной.

3. В статье [3] рассматривалось дифференцируемое отображение $\varphi: P_m \to R(p,\pi)$ $(m \geq 2n)$. Поместив нулевую вершину подвижного репера пространства P_m в точку P^0, такую, что $\varphi(P^0) = (p^0, \pi^0)$ и используя обозначения работы [3], получим в P_m два инвариантных алгебраических многообразия

$$\Lambda^i_{\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa - 2\Lambda^i_\jmath X^\jmath X^0 = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa - 2\Lambda_{i\jmath} X^\jmath X^0 = 0, \tag{3.2}$$

определяемые фундаментальным объектом 2-го порядка отображения φ. Многообразия (3.1) и (3.2) называются соответственно F_1 -индикатрисой $\mathcal{J}_1$ и F_2-индикатрисой $\mathcal{J}_2$.

Обозначим символом $[V]$ множество прямых связки $\{P^0\}$, которые имеют с многообразием $V \subset P_m$ две общие точки или касаются ее. В этих обозначениях конус χ_a характеристических прямых отображения $\Pi_a \circ \varphi$ определяется формулой $\chi_a = [\mathcal{J}_a]$ (см [3, с.9]). При обобщении понятия характеристических направлений точечного отображения для отображения φ возникают две возможности определения конуса характеристических прямых отображения φ :

$$\widetilde{\chi} = [\mathcal{J}_1] \cap [\mathcal{J}_2], \qquad \chi = [\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2]. \tag{3.3}$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Конус χ (конус $\widetilde{\chi}$) называется конусом характеристических (слабо характеристических) прямых отображения φ.

Очевидно, выполняется $\chi \subset \widetilde{\chi}$.

Понятие характеристических направлений отображения $P_m \to P_n$ $(m \neq n)$ было введено В.В.Рыжковым [2]. Исключим из рассмотрения нулевые характеристические направления отображений $\Pi_a \circ \varphi$. Следующая теорема показывает, что направления, определяемые конусами $\widetilde{\chi}$ и χ, являются обобщениями характеристических направлений точечного отображения в смысле В.В.Рыжкова соответственно для слабой и для сильной геометрии многообразий нуль-пар.

Т е о р е м а 3.I. Чтобы направление, определяемой в точке P° инфлексионной в ней кривой $\ell: R \to P_m$ $(\ell(0)=P^\circ)$, было характеристическим (слабо характеристическим), необходимо и достаточно, чтобы кривая $\varphi \cdot \ell: R \to R(p,\pi)$ была в элементе $\ell(0)$ инфлексинной (слабо инфлексионной).

Доказательство следует из формул (1.6), (1.8), (1.9) работы [3].

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве: Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1969, с.179-206.

2. Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. - Тр. Геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, с.235-242.

3. А н д р е е в Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.5, Калининград, 1974, с.6-24.

Н. В. Г в о з д о в и ч

О ТРИ-ТКАНЯХ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

I. Рассмотрим три-ткань [1] на дифференцируемом многообразии M^{2r}, образованную тремя слоениями коразмерности r, находящимися в общем положении на M^{2r}. Пусть на многообразии M^{2r} задано векторное поле $\xi = \underset{1}{\xi^i} \underset{2}{e_i} - \underset{2}{\xi^i} \underset{1}{\bar{e}_i}$. Справедливы [2] следующие предложения:

А. Векторное поле ξ порождает инфинитезимальный автоморфизм три-ткани тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \underset{1}{\xi^i} = (\xi^i_j + 2a^i_{jk} \underset{1}{\xi^k}) \underset{1}{\omega^j}, \quad \nabla \underset{2}{\xi^i} = (\xi^i_j - 2a^i_{jk} \underset{2}{\xi^k}) \underset{2}{\omega^j}, \qquad \text{(I)}$$
$$\nabla \xi^i_j = b^i_{jk\ell} (\underset{2}{\xi^k} \underset{1}{\omega^\ell} - \underset{1}{\xi^\ell} \underset{2}{\omega^k}).$$

Здесь "∇" - оператор ковариантного дифференцирования относительно связности, порожденной тканью, а a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$, соответственно, тензоры кручения и кривизны ткани. Причем,

$$\nabla b^i_{jk\ell} = \underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m} \underset{1}{\omega^m} + \underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m} \underset{2}{\omega^m}.$$

Б. Три-ткань допускает r^2+2r-s — параметрическую группу инфинитезимальных автоморфизмов, если количество линейно независимых уравнений относительно $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$, ξ^i_j, в системе, состоящей из соотношений

$$b^i_{[j|m|k]} \underset{1}{\xi^m} + b^i_{[jk]m} \underset{2}{\xi^m} + T_1\left(\begin{smallmatrix} p \\ m \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\right) \xi^m_p = 0, \qquad (2)$$
$$\underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m} \underset{1}{\xi^m} + \underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m} \underset{2}{\xi^m} + T_2\left(\begin{smallmatrix} p \\ m \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} i \\ jk\ell \end{smallmatrix}\right) \xi^m_p = 0$$

и соотношений, полученных при их внешнем дифференциро-